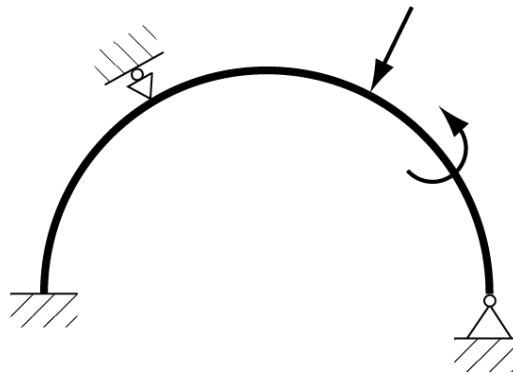


Mécanique des structures

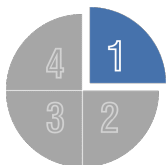


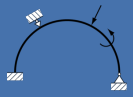
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Pr. H. Shea & Dr. A. Preneloup

SGM BA3 2025-2026

EPFL



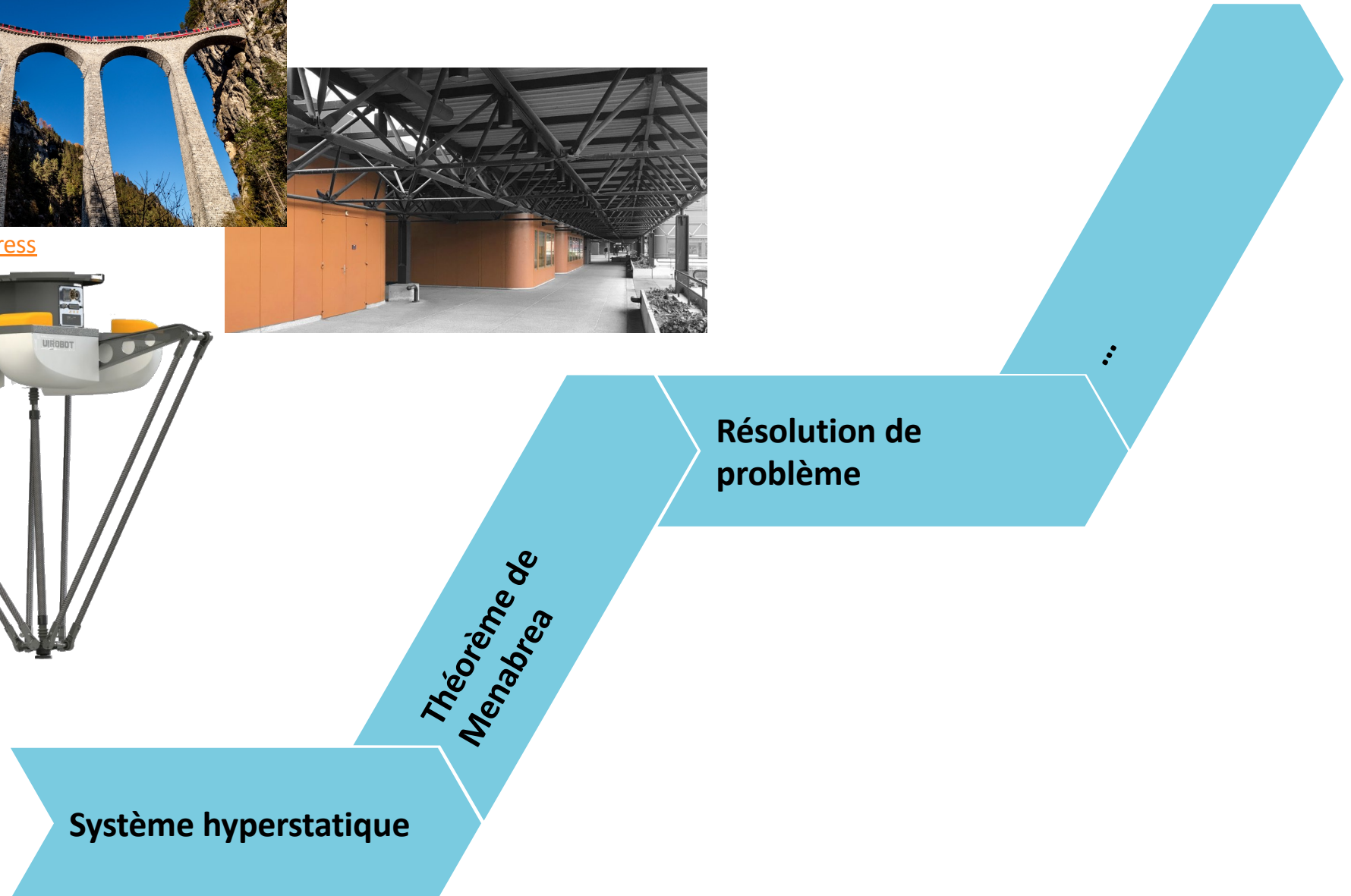


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Application



Le Bernina Express



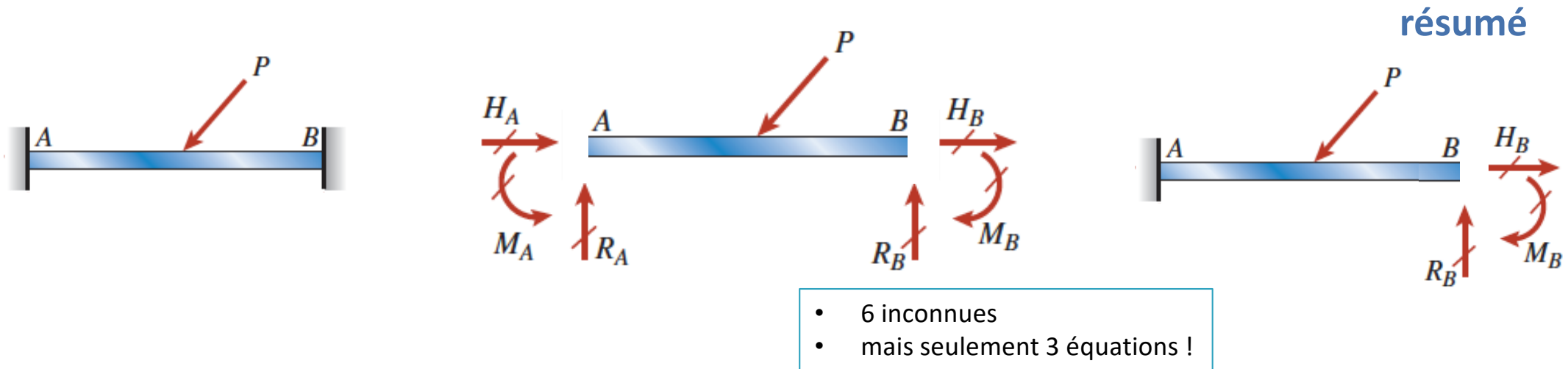
Système hyperstatique

Théorème de
Menabrea

Résolution de
problème

...

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$



Aperçu des Méthodes de ce chapitre

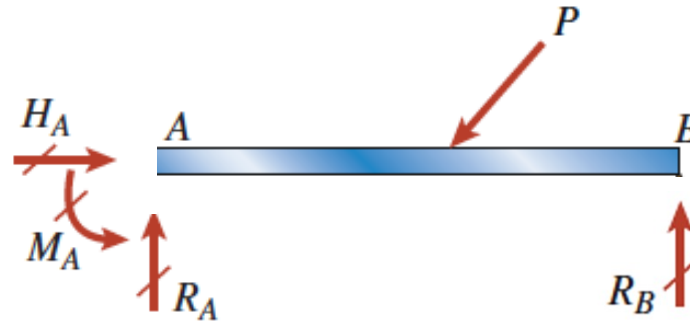
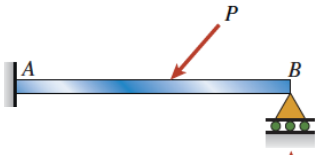
Option 1:

1. Parmi les inconnues je remplace les **k liaisons surabondantes** par **autant de forces généralisées** (Forces ou Moments). Ici, par ex R_B , M_B et H_B , que je ne connais pas encore
2. (Je redessine, changeant les supports en vu des liaisons remplacées par des forces)
3. Je résous par equ de la statique pour trouver les forces de réaction en fonction forces généralisées
4. Pour chaque force généralisée, j'ajoute une condition de compatibilité. Par ex: $y(B) = 0$, $y'(B) = 0$
5. Je peux maintenant trouver les forces généralisées
6. Je peux trouver la flèche de la poutre ainsi que les effort internes

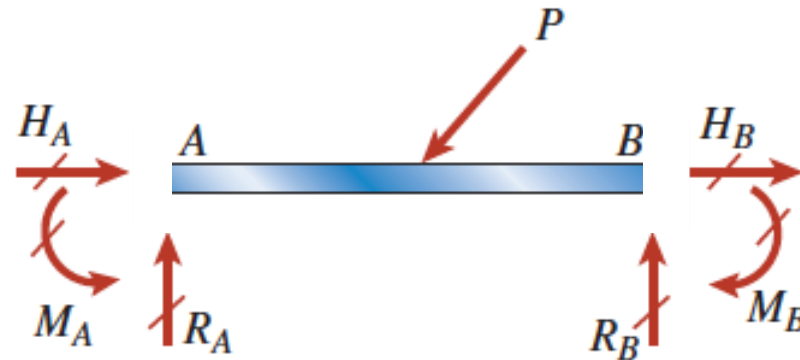
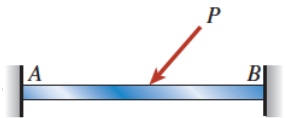
Option 2 : Résolution par Théorème de Menabrea (minimiser l'énergie) $\frac{\partial U}{\partial R_1} = 0$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Poutres statiquement indéterminées en 2D



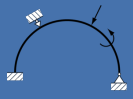
4 inconnues
mais 3 équations...



6 inconnues
mais 3 équations...

Un corps est cinématiquement en équilibre si et seulement si le torseur résultant des forces extérieures qui agissent sur lui est nul:

- $\sum \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$ somme forces extérieures nulle
- $\sum \mathbf{M}_e = \mathbf{0}$ somme des moments extérieurs nulle



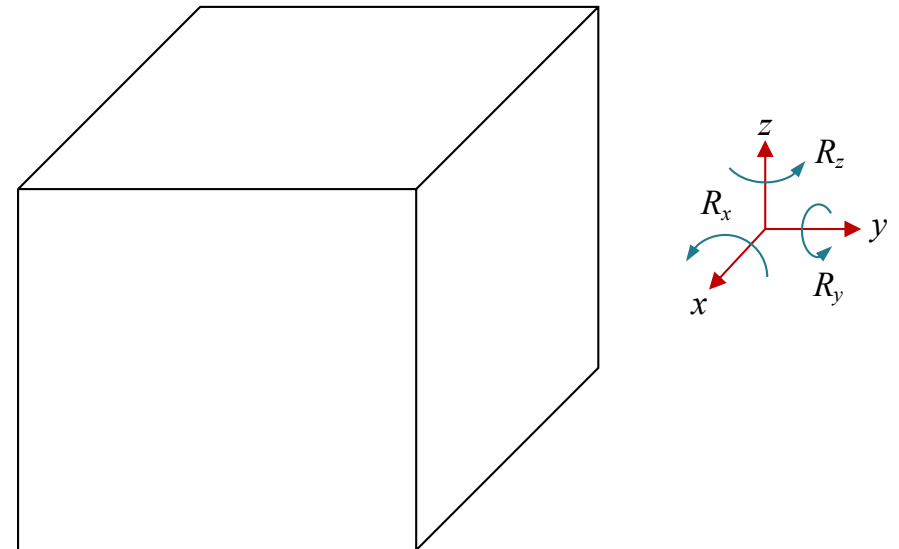
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

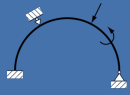
Exemple d'un corps rigide 3D: 6 ddl \rightarrow 3 translations et 3 rotations

Ce corps peut-être :

- Libre ddl= 6
- Isostatique ddl = 0
- Hypostatique ddl ≥ 1
- Hyperstatique ddl < 0



Comment rendre un problème isostatique lors de la simulation numérique d'une dilatation thermique d'un corps?



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

Quand les efforts intérieurs ne peuvent être déterminés en tout point par le simple jeu des équations d'équilibre, le système est dit **hyperstatique**.

Quand le **nombre p des liaisons extérieures** dépasse le **nombre des conditions d'équilibre (3 ou 6)**, le système est **hyperstatique extérieurement**.

La différence k constitue l'ordre ou degré d'hyperstaticité extérieure

- $k = p - 6$ pour un système de l'espace (3D)
- $k = p - 3$ pour un système plan (2D)

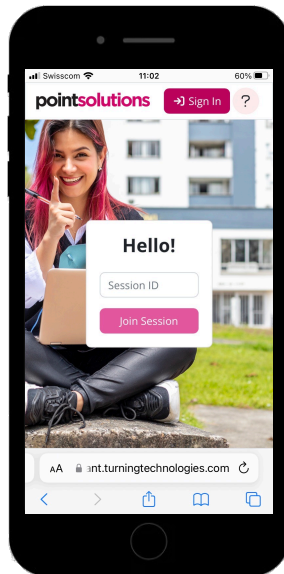
(Attention: la symétrie du système peut réduire l'hyperstatisme)

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Chapitre 11 : Hyper statique

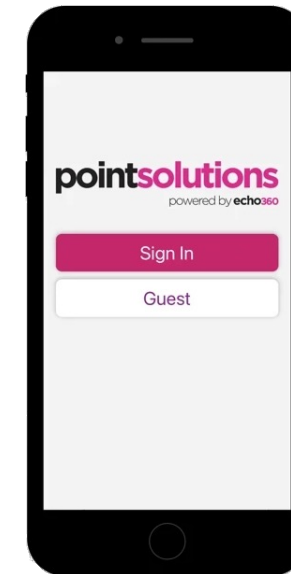
Sondage via Turning Point

- Ordinateur, tablette ou téléphone
- Navigateur web via l'URL : ttpoll.eu

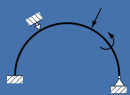


- Session ID: **sgm232**
- Anonyme

- Tablette ou téléphone
- Installation : **pointsolutions**



- Session ID: **sgm232**
- Guest



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

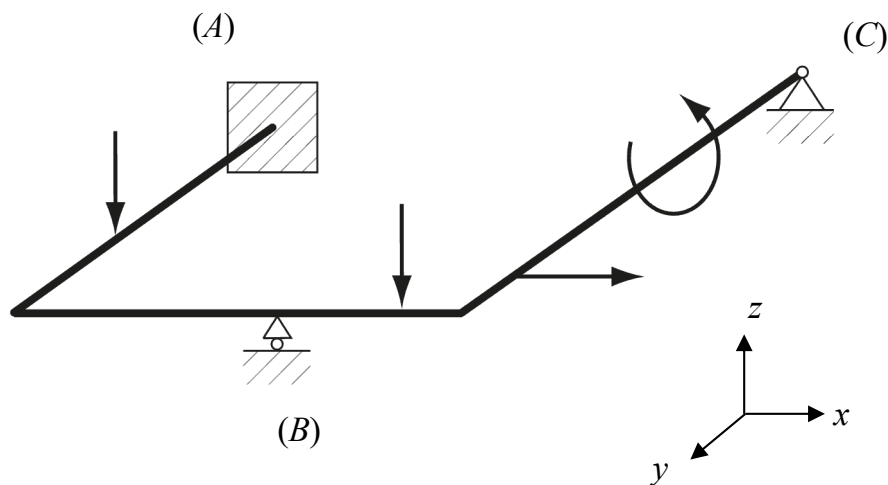
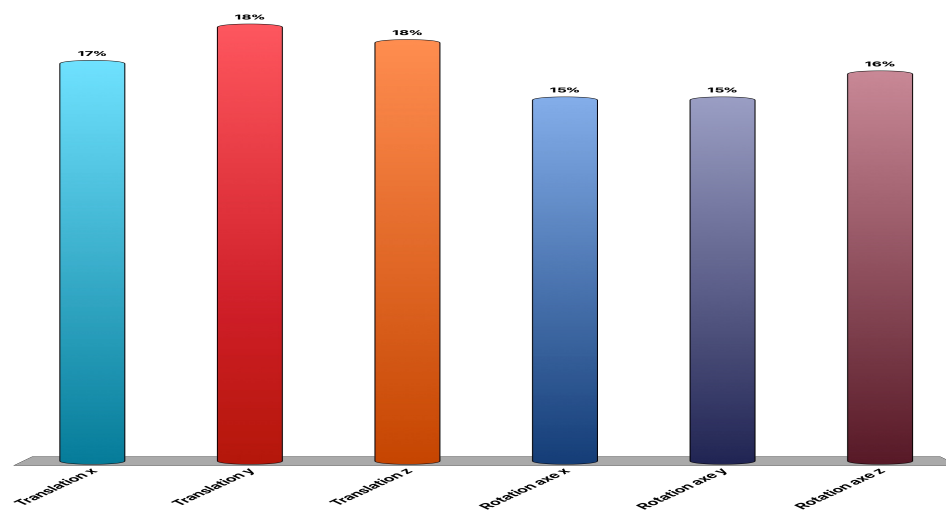
Généralités des systèmes hyperstatiques

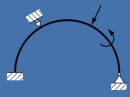
→ Session ID: **SGM232**

tppoll.eu

Quels degrés de liberté sont bloqués au point *A* ?

- A. Translation *x*
- B. Translation *y*
- C. Translation *z*
- D. Rotation axe *x*
- E. Rotation axe *y*
- F. Rotation axe *z*



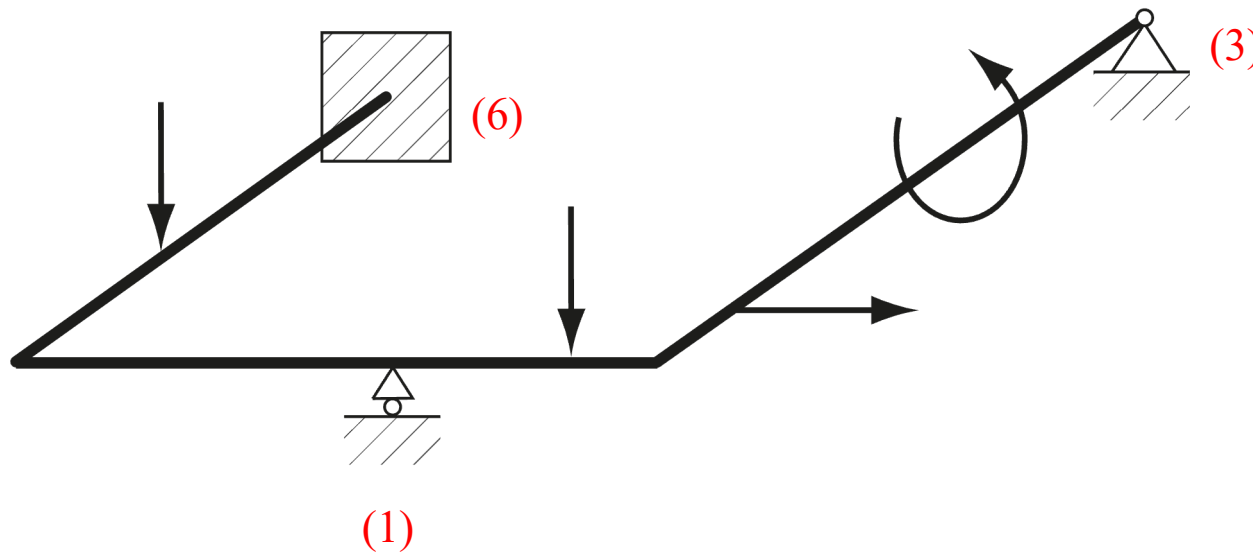


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

Exemples de système *hyperstatiques extérieurement*, 3D

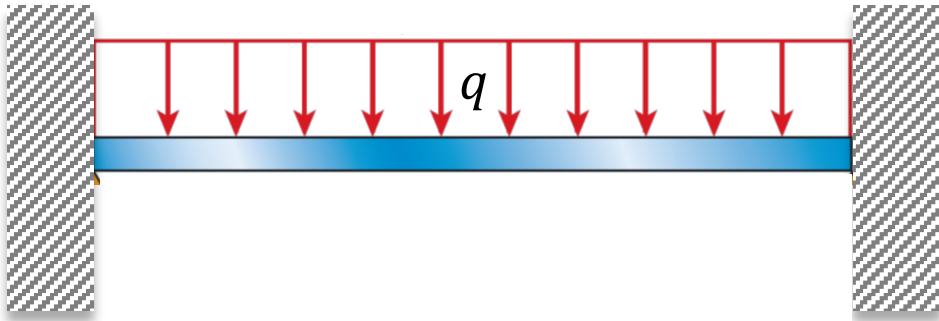
- $k = (6 + 1 + 3) - 6 = 4$ pour la structure tridimensionnelle



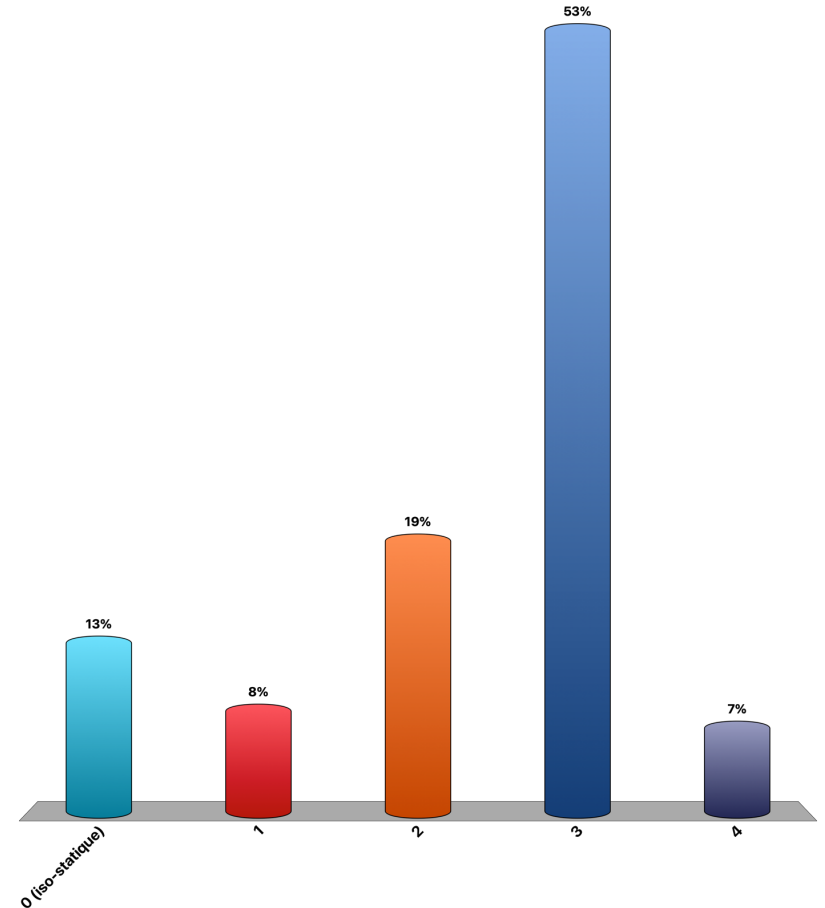
→ Session ID: SGM232

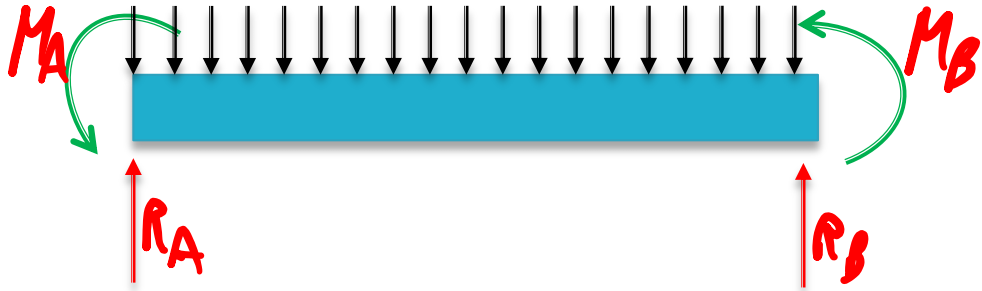
tppoll.eu

Quel est l'hyperstatisme de ce système?

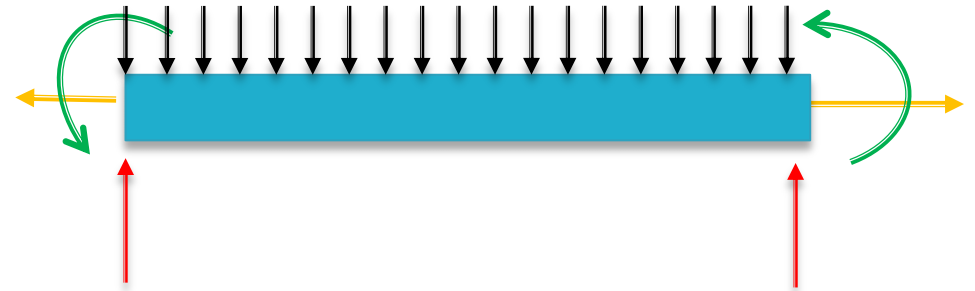


- A. 0 (iso-statique)
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

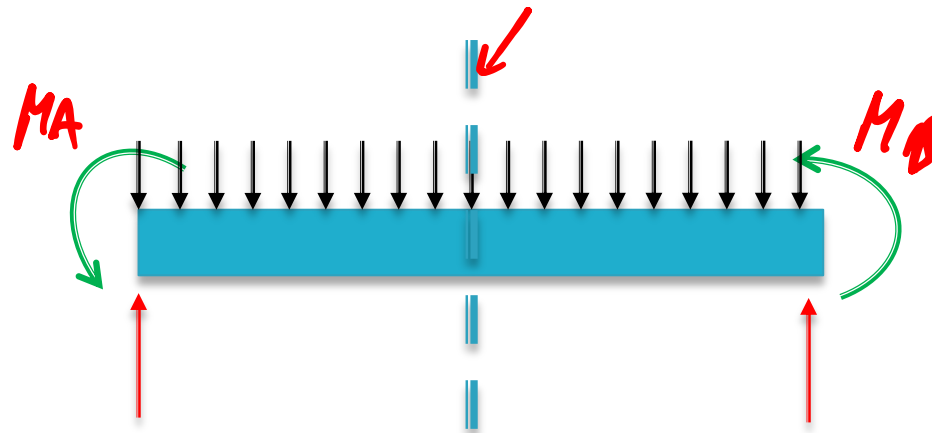
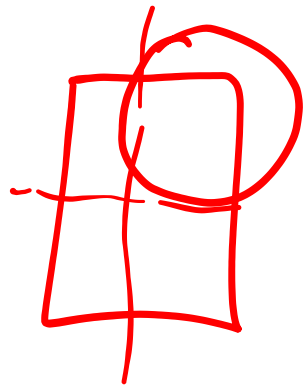




4 inconnus, 2 eqs. $k=2$



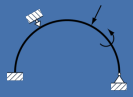
6 inconn, 3 eqs. $k=3$.



$$M_A = M_B$$

$$R_A = R_B$$

Ou symétrie, et 0 redondants...

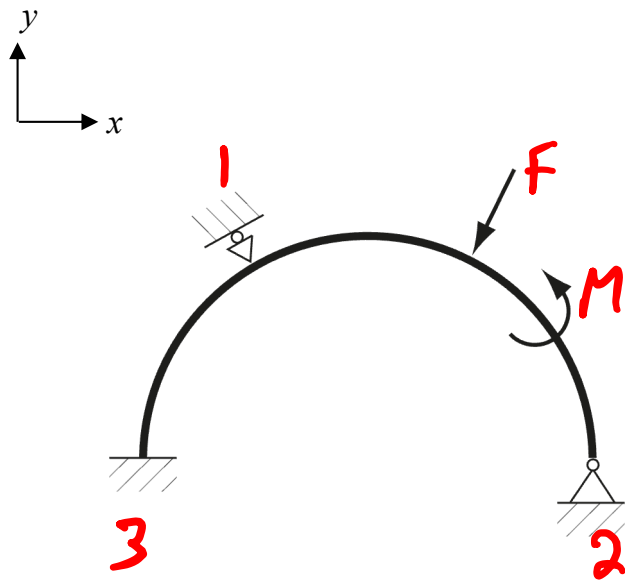


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

→ Session ID: SGM232

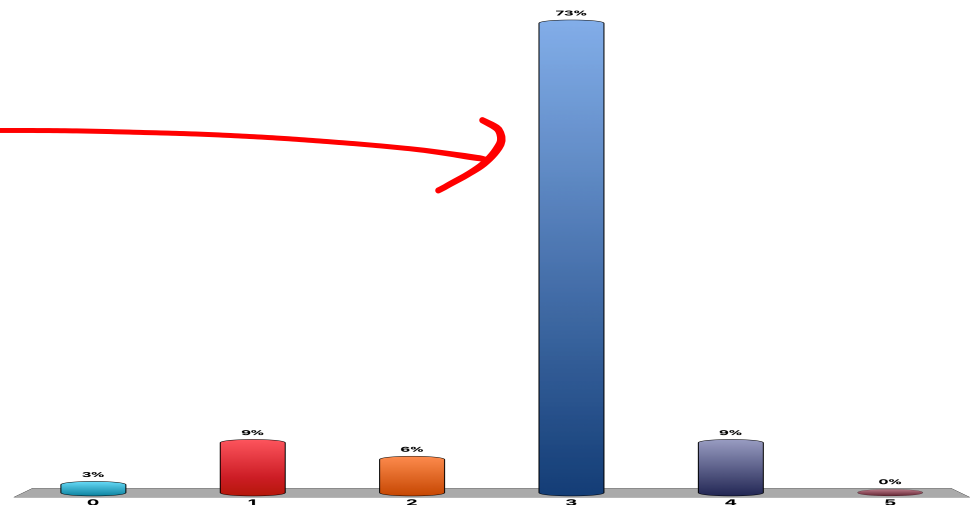
tppoll.eu

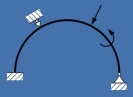


Que est l'hyperstatisme de ce système?
C'est-à-dire que vaut k ? (problème plan)

- | | | | | | |
|----|---|---|----|---|---|
| A. | 0 | X | D. | 3 | ✓ |
| B. | 1 | X | E. | 4 | X |
| C. | 2 | X | F. | 5 | ✓ |

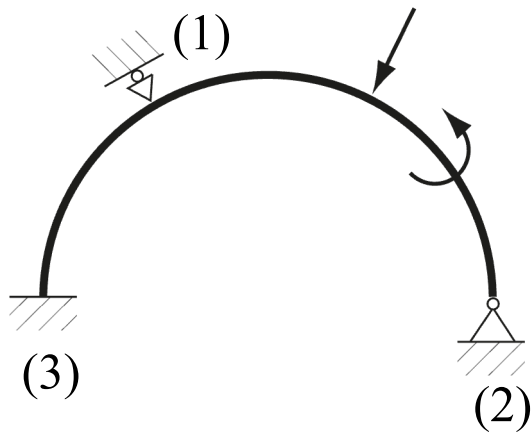
$$6 - 3 = 3$$



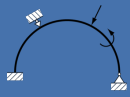


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Système plan



$$k = 3 + 1 + 2 - 3 = 3$$

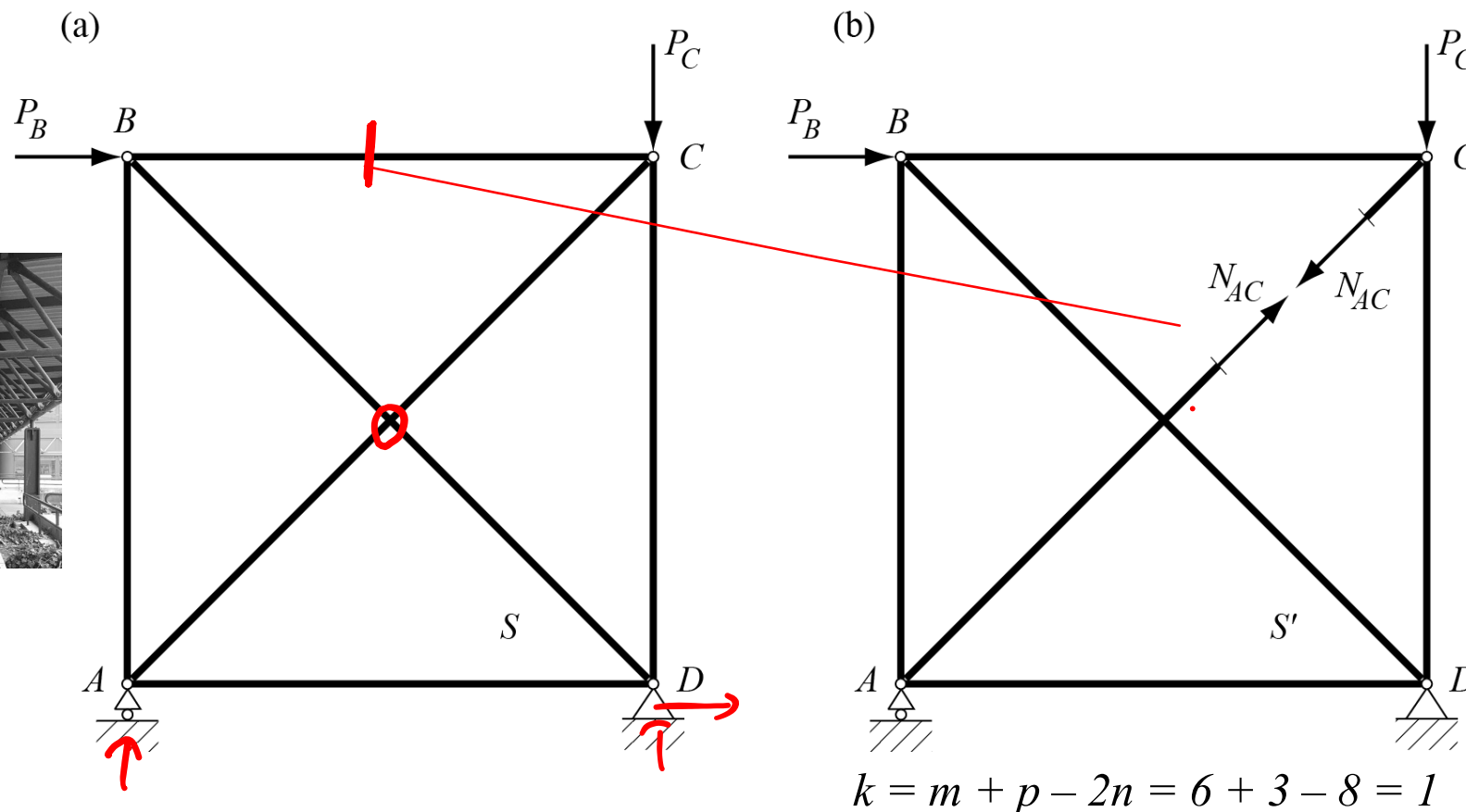


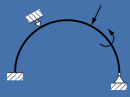
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Système plan de barres articulées en treillis

Un système est **hyperstatique intérieurement** quand la connaissance de toutes les réactions extérieures n'est pas suffisante pour calculer les efforts intérieurs.

Une telle structure est hyperstatique intérieurement d'ordre $k = m + p - 2n$, où m désigne le nombre de barres, p est le nombre de liaisons extérieures (si $p > 3$, le système est déjà hyperstatique extérieurement), et n dénote le nombre total de nœuds.



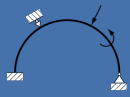


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques



<https://3dprinting.com/tips-tricks/3d-printed-lattice-structures/>

quasi impossible de déterminer l'état de contrainte initiale, car il sera fonction des précontraintes induites lors de la fabrication (ici) ou montage (structure toit) ou pour les structures soudées.

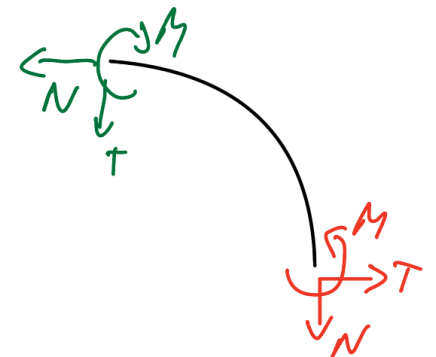
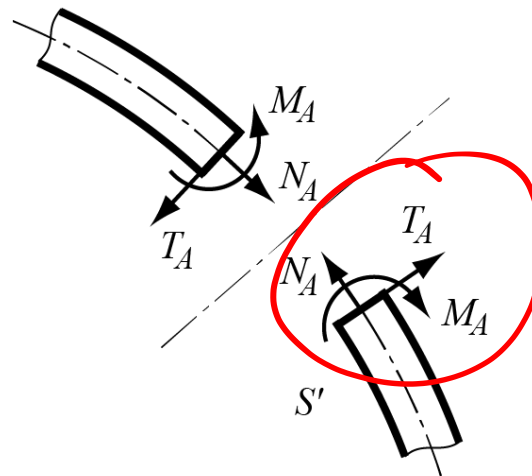
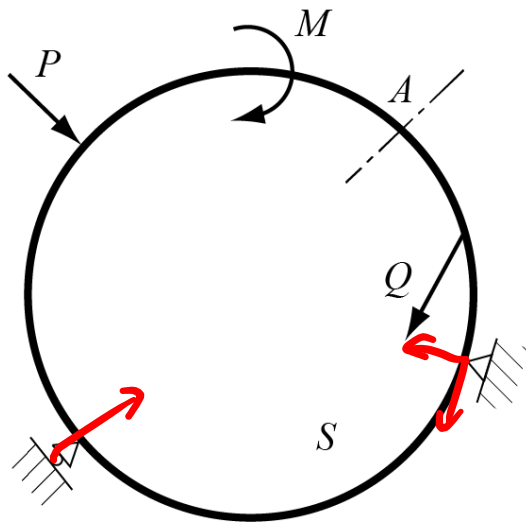


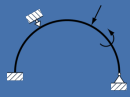
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Système fermé, non-articulé

Une structure en forme de cadre ou d'anneau est **hyperstatique intérieurement** d'ordre 3 dans le plan et d'ordre 6 dans l'espace.

Pour obtenir un système isostatique fondamental S' du système donné S , on peut remplacer les k liaisons intérieures surabondantes par des forces hyperstatiques inconnues R_1, R_2, \dots, R_k en coupant la boucle dans une section arbitraire et en considérant comme hyperstatiques les efforts intérieurs dans cette section



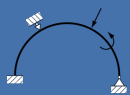


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

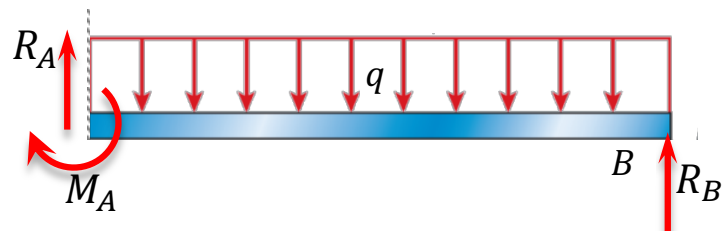
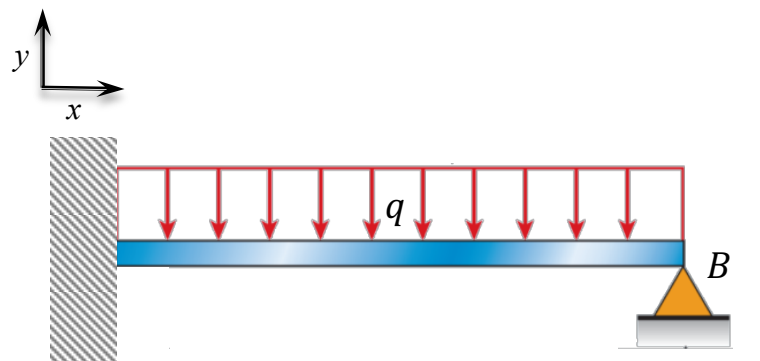
Généralités des systèmes hyperstatique

Pour calculer un système hyperstatique extérieurement S , on procède de la manière suivante :

- a) on remplace les k liaisons surabondantes par autant de forces généralisées (forces ou moments) inconnues R_1, R_2, \dots, R_k appelées **réactions hyperstatiques** et choisies arbitrairement parmi les p liaisons du système, de sorte que l'on obtient le système isostatique fondamental S' dérivé du système donné S
- b) on exprime ensuite les conditions d'équilibre du système S' (six dans l'espace, trois dans le plan) ainsi que les efforts intérieurs en fonction des forces extérieures et des hyperstatiques choisies
- c) on établit k conditions de déformation correspondant aux k liaisons supprimées et constituant les équations permettant de calculer les k hyperstatiques inconnues R_1, R_2, \dots, R_k
- d) avec les valeurs R_1, R_2, \dots, R_k , on obtient les autres réactions et les efforts intérieurs du système S



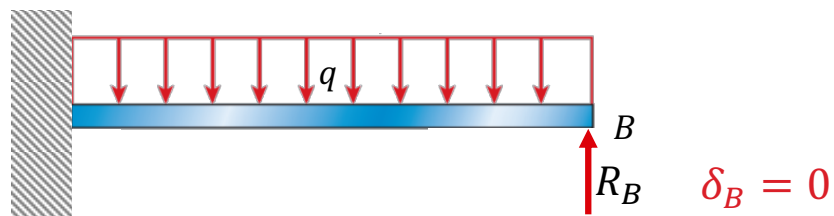
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques



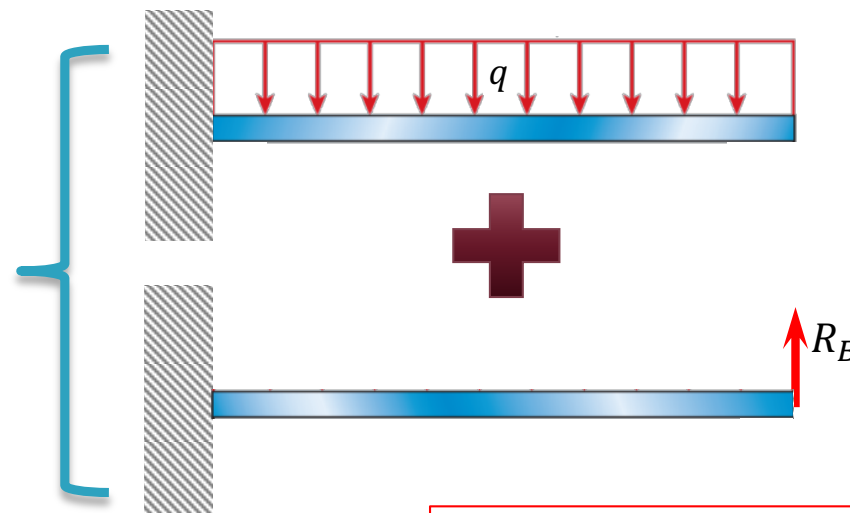
$$k=3-2=1$$

Choix de R_B comme réaction hyperstatique (mais on aurait pu prendre M_A ou R_A)

R_B : impose $\delta_B = 0$ comme équation de compatibilité

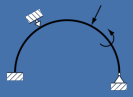


exemple



$$y_1(x=B) + y_2(x=B) = 0$$

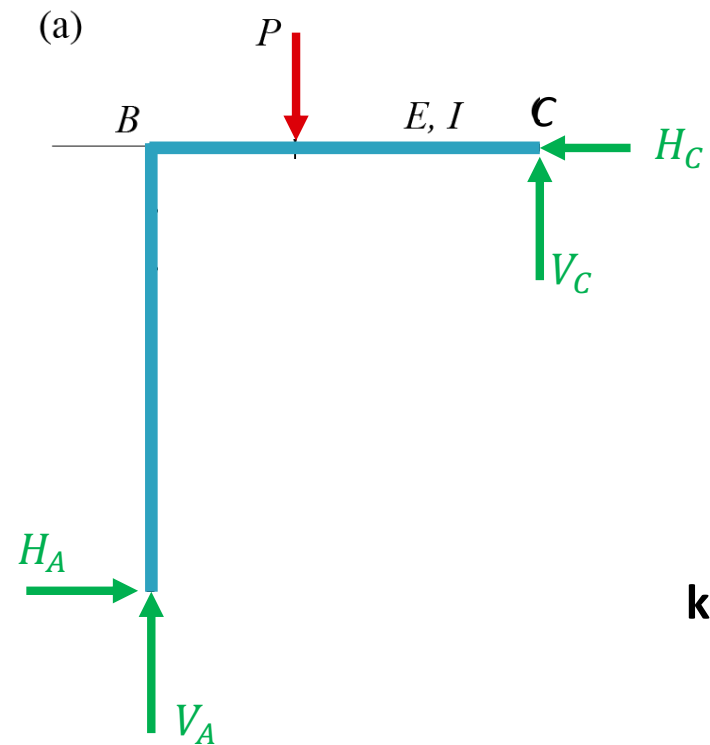
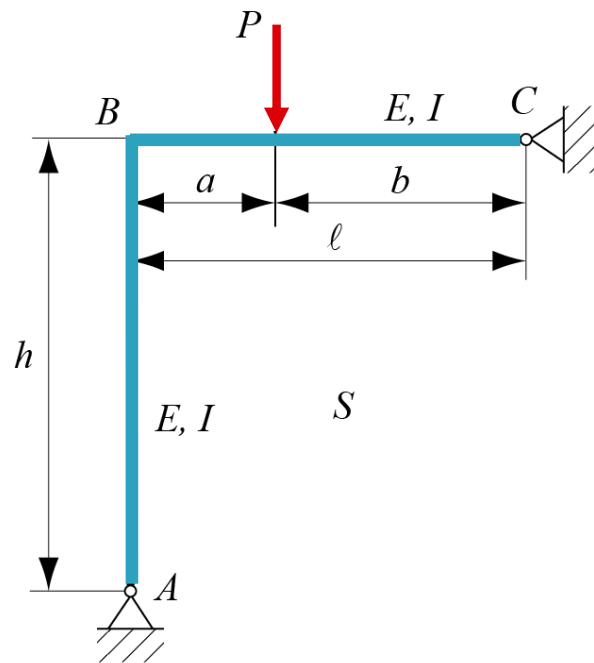
- Annexe IV pour $y(x)$ pour chaque cas de charge (*rappel*: R_B n'est pas encore connue)
- Avec $\delta_B = 0$ on trouve R_B
- Puis c'est un problème iso-statique



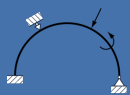
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1

Calculer les réactions aux points A et C du système hyperstatique S



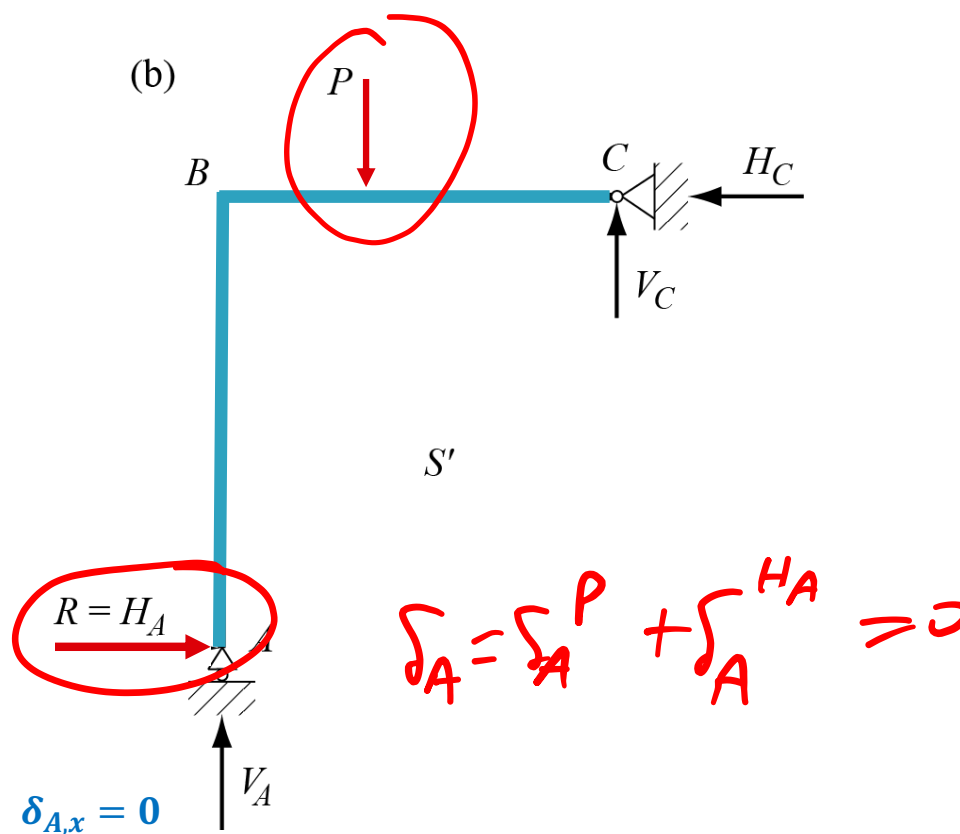
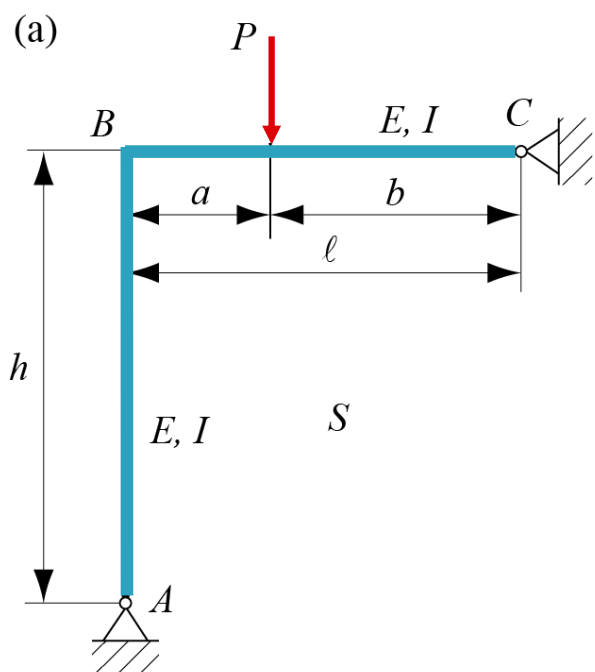
$$k=4-3=1$$



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1

- Choisissons H_A comme réaction hyperstatique
- Donc: Condition de compatibilité: $\delta_{A,x} = 0$

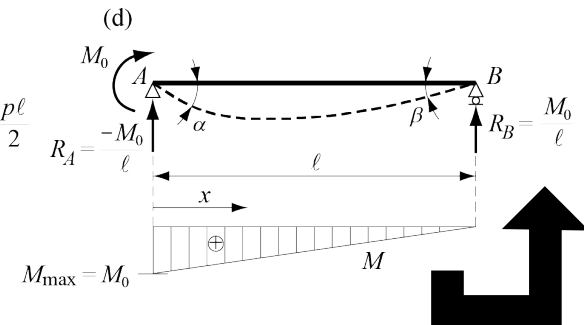
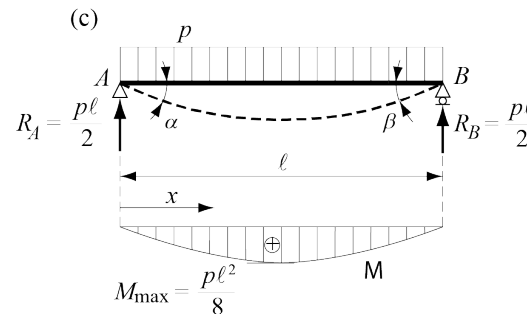
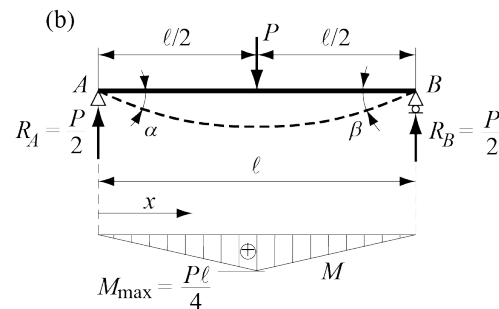
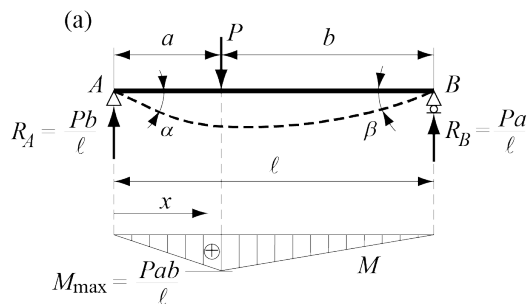


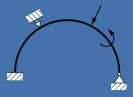
Le support en A a changé car H_A choisie comme réaction hyperstatique!

Annexe IV

Flèches et rotations de quelques poutres droites en flexion simple sur appuis simple

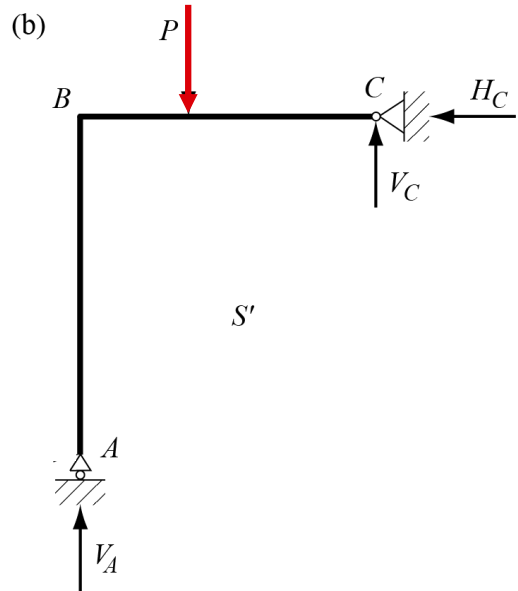
Cas de charge	Ligne élastique $y(x)$	Flèche maximale f	Position de la flèche x	Rotation aux extrémités α β	
(la) $(0 \leq x \leq a)$	$y = \frac{P}{6\ell EI} (2ab^2x + a^2bx - bx^3)$	–	$a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}}$ si $a > b$	$\frac{Pab(\ell + b)}{6\ell EI}$	–
(la) $(a \leq x \leq \ell)$	$y = \frac{P}{6\ell EI} [2a^2b(\ell - x) + ab^2(\ell - x) - a(\ell - x)^3]$	–	$\ell - b\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}}$ si $a < b$	–	$\frac{-Pab(\ell + a)}{6\ell EI}$
(lb) $(a \leq x \leq \ell/2)$	$y = \frac{P}{48EI} (3\ell^2x - 4x^3)$	$\frac{P\ell^3}{48EI}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{P\ell^2}{16EI}$	$-\frac{P\ell^2}{16EI}$
(lc)	$y = \frac{p}{24EI} (x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3x)$	$\frac{5p\ell^4}{384EI}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{P\ell^3}{24EI}$	$-\frac{P\ell^3}{24EI}$
(ld)	$y = \frac{M_0}{6\ell EI} (x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^2x)$	$\frac{M_0\ell^2\sqrt{3}}{27EI}$	$\ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{M_0\ell}{3EI}$	$-\frac{M_0\ell}{6EI}$





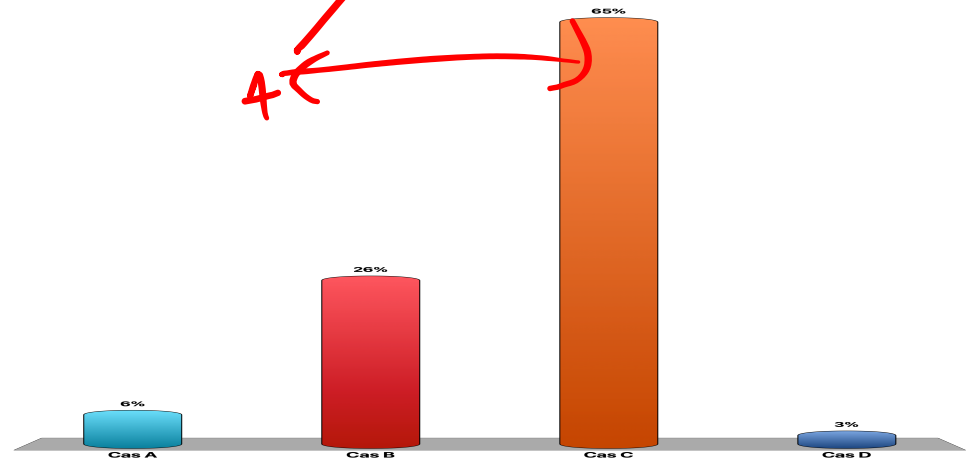
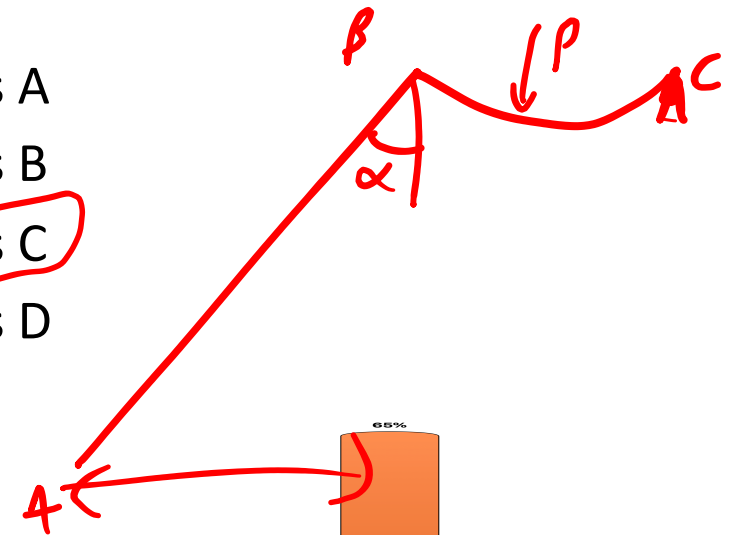
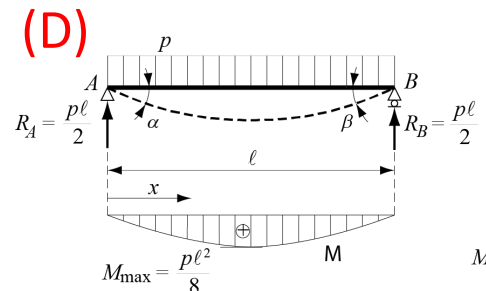
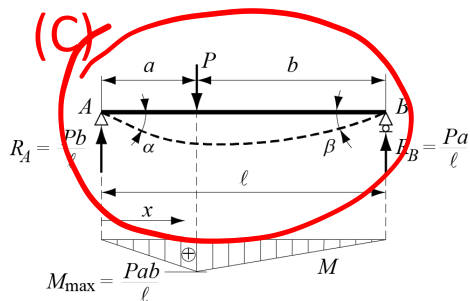
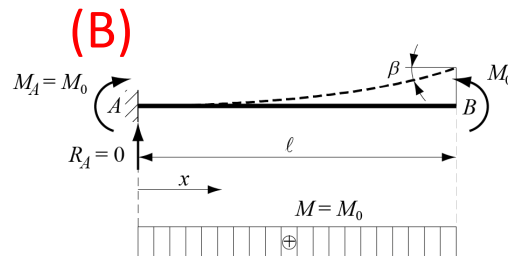
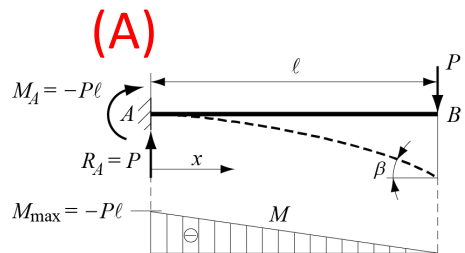
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

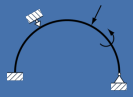
Problème 11.1



Déplacement horizontal du point A dû seulement à la charge P inclus une déformation de la poutre BC de type :

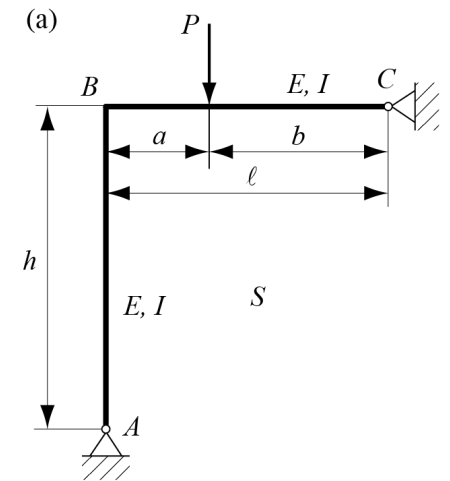
- A. Cas A
- B. Cas B
- C. **Cas C**
- D. Cas D

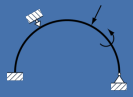




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

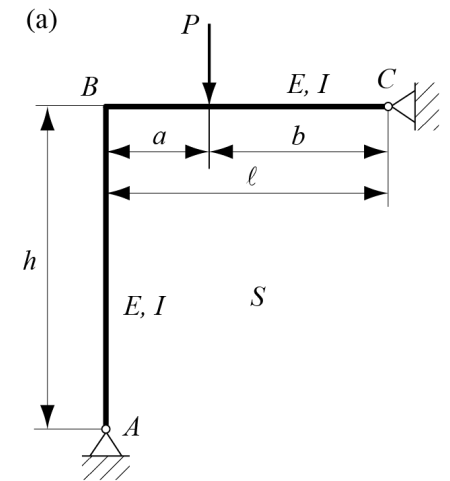
Problème 11.1

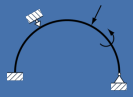




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

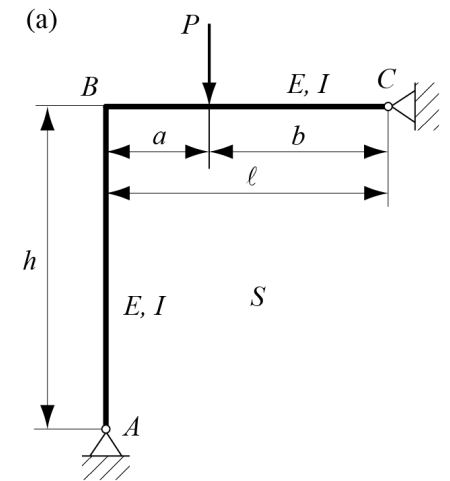
Problème 11.1



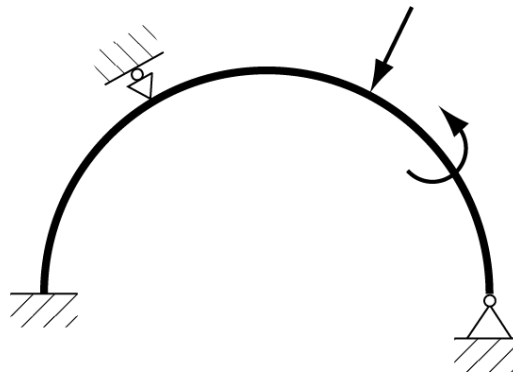


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1



Mécanique des structures



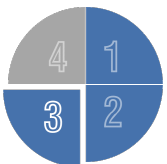
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

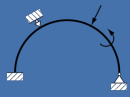
Théorème de Menabrea

Pr. H. Shea & Dr. A. Preneloup

SGM BA3 2025-2026

EPFL





Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Énoncé : Théorème de Menabrea

Énoncé du théorème : *Les hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes prennent les valeurs qui rendent minimum l'énergie de déformation du système.*

Les réactions hyperstatiques R_1, R_2, \dots, R_k ne pouvant fournir aucun travail au système, il suffit d'annuler les dérivées partielles de l'énergie de déformation par rapport à ces réactions, ce qui conduit aux relations complémentaires cherchées

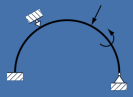
$$\bullet \quad \frac{\partial U}{\partial R_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial R_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial R_k} = 0$$

Le théorème est l'application du principe du travail minimum à la détermination des liaisons surabondantes.

On peut établir qu'il s'agit bien d'un minimum en montrant que la deuxième différentielle totale de la forme quadratique par rapport aux hyperstatiques R_1, R_2, \dots, R_k est toujours positive

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_1^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_2^2} > 0 \quad \dots \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_k^2} > 0$$

C'est comme Castigliano: très semblable au chapitre 10 ...



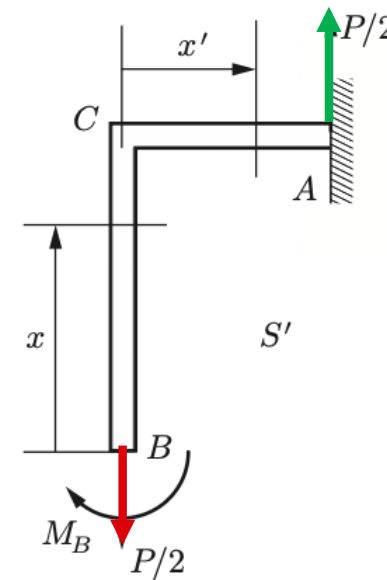
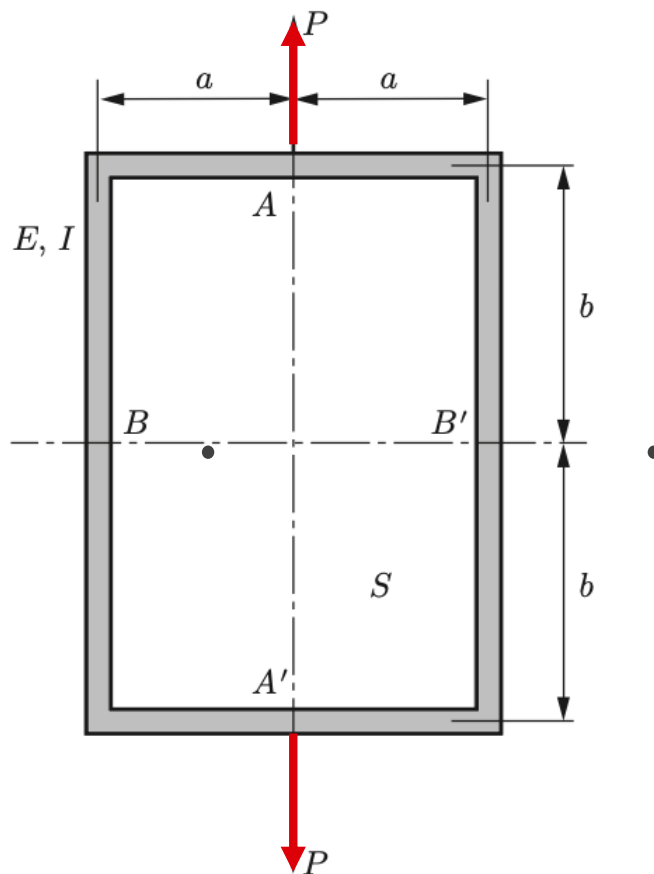
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

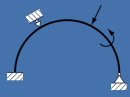
Problème 11.3

Par le théorème de Menabrea,

- trouver le moment hyperstatique intérieur au point B du cadre
- puis calculer le déplacement relatif des points A et A' .

On ne considérera que l'énergie de flexion.





Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

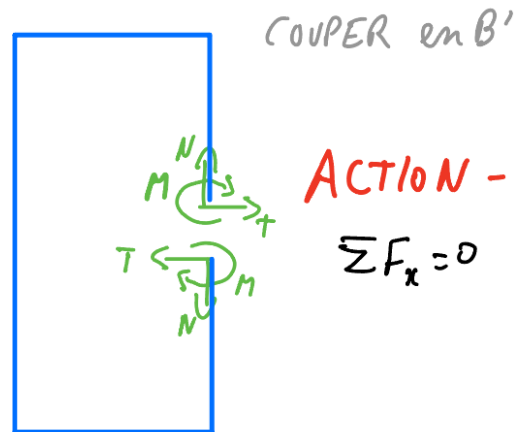
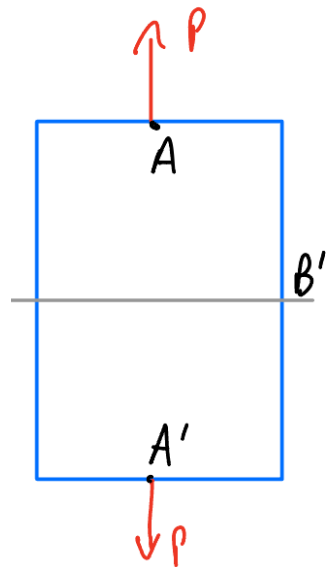
Problème 11.3

Par symétrie, la force horizontale T en B est nulle. De même, la force interne T verticale en A est nulle.

Si on coupe en B' , on peut faire apparaître les force N, T, M internes:

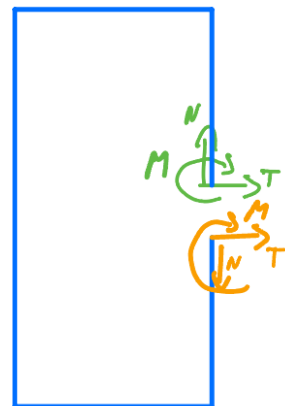
i) soit par action-réaction, $T - T = 0$, ce qui ne nous permet pas de déterminer T dans la figure ci-dessous.

ii) soit en tenant compte de la symétrie par l'axe BB' , qui nous permet d'écrire $T + T = 0$, et donc $T = 0$



ACTION - REACTION

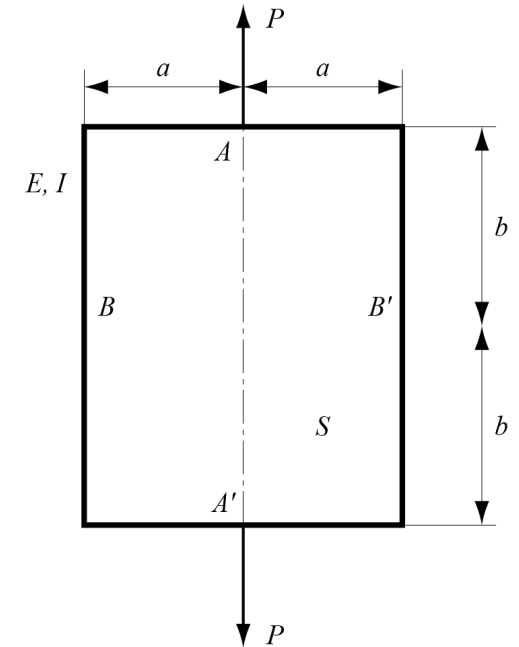
$$\sum F_x = 0 \quad T - T = 0$$

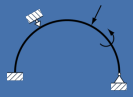


SYMETRIE

$$\sum F_z = 0 \quad T + \bar{T} = 0$$

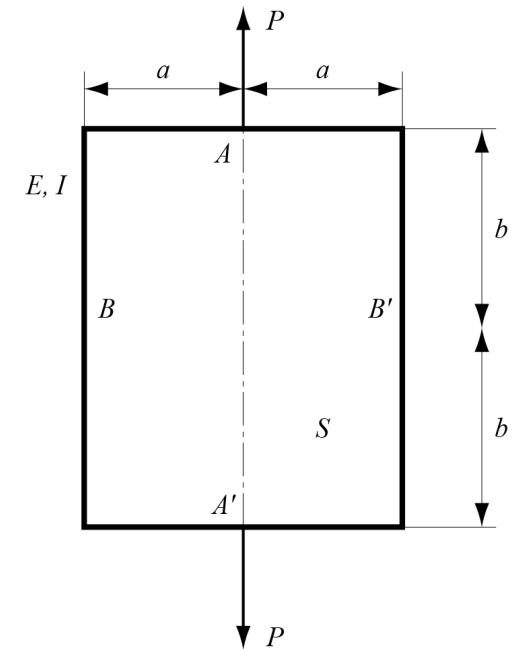
$$\rightarrow T = 0$$

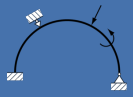




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

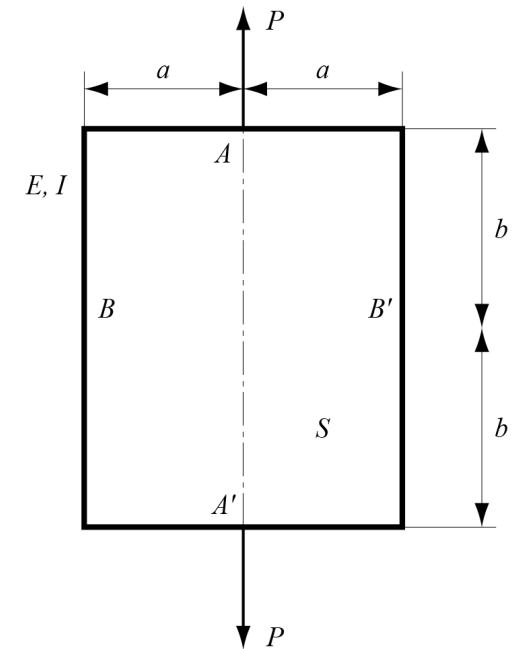
Problème 11.3

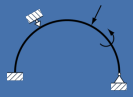




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.3





Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Exemple avec simulation

Le dynamomètre schématisé est constitué d'un anneau circulaire de section rectangulaire, dont on mesure la variation de diamètre AB par un capteur inductif.

- Calculer la **charge maximum** d'utilisation P telle que $\sigma_{max} = \frac{3}{4} \sigma_e = 450 \text{ MPa}$
- Calculer le **déplacement relatif** δ des points A et B pour cette charge

Donnée numériques :

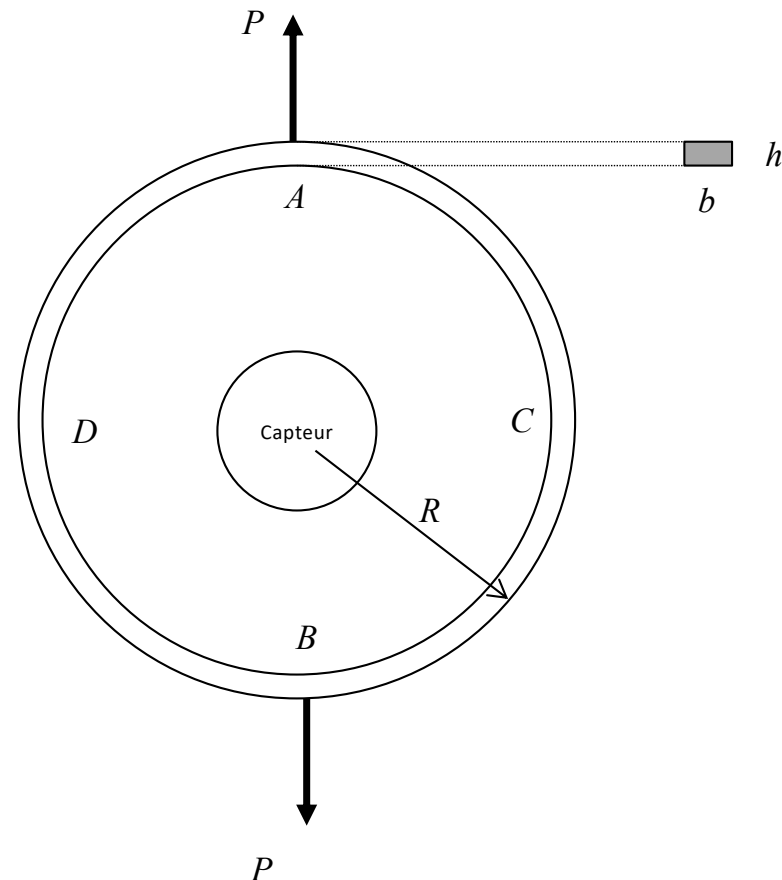
$$R = 100 \text{ mm}$$

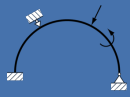
$$b = 20 \text{ mm}$$

$$h = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = 600 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



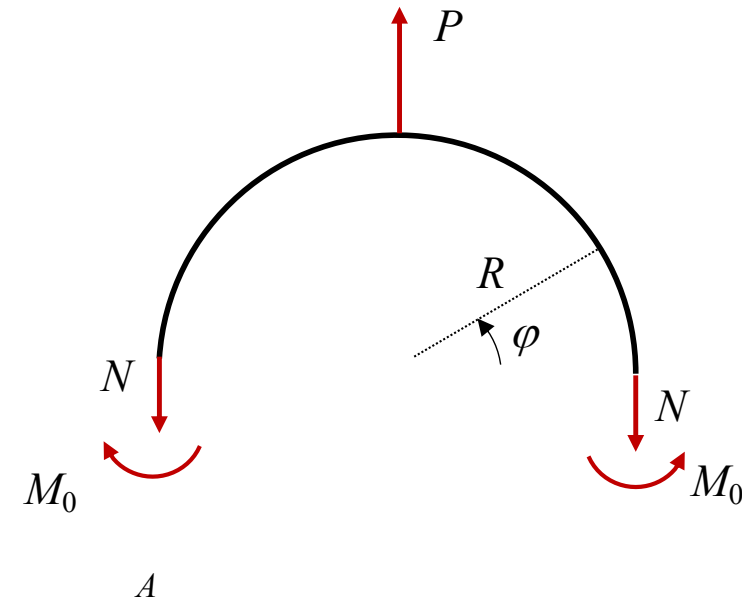


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Exemple avec simulation

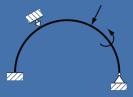
Exprimons le moment de flexion

- $M_f(\varphi) = M_0 - \frac{P}{2}R(1 - \cos\varphi)$
 - $\frac{\partial M_f(\varphi)}{\partial M_0} = 1$
 - $\frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_f(\varphi)}{EI} \frac{\partial M_f(\varphi)}{\partial M_0} R d\varphi = 0$
- $M_0 = \frac{\pi-2}{2\pi} PR$



$M_f(\varphi)$ est maximum au point A ce qui permet de déterminer la force maximale supportée

- $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{M(\varphi=\pi/2)}{I/h/2} = \frac{3}{4}\sigma_e \cong 450 MPa$
- $P = 10'600 N$



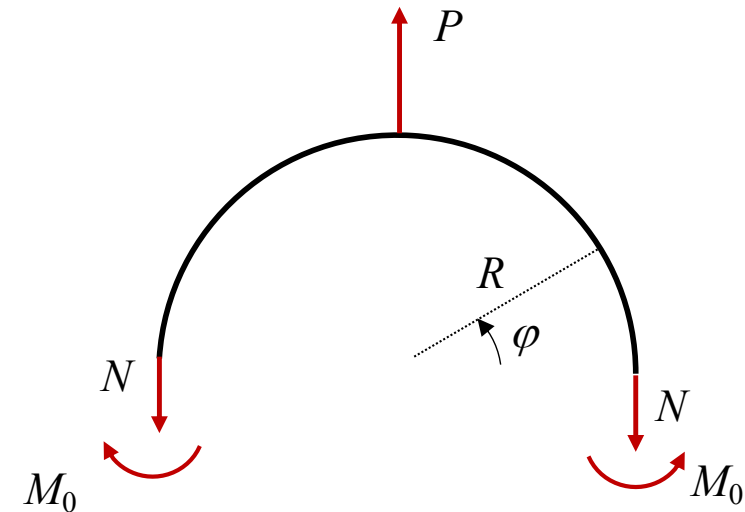
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

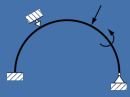
Exemple avec simulation

On cherche alors à exprimer le déplacement du point A (par Castigliano)

$$\bullet \delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{M_f(\varphi)}{EI} \frac{\partial M_f(\varphi)}{\partial P} R d\varphi$$

$$\rightarrow \delta_A = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{PR^3}{EI} = 1.34 \text{ mm}$$



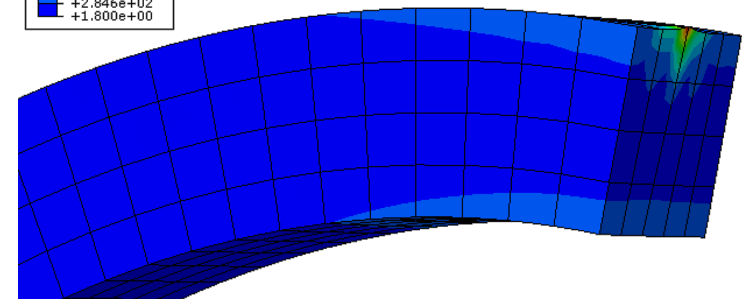
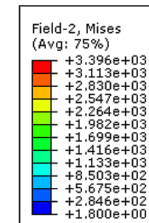
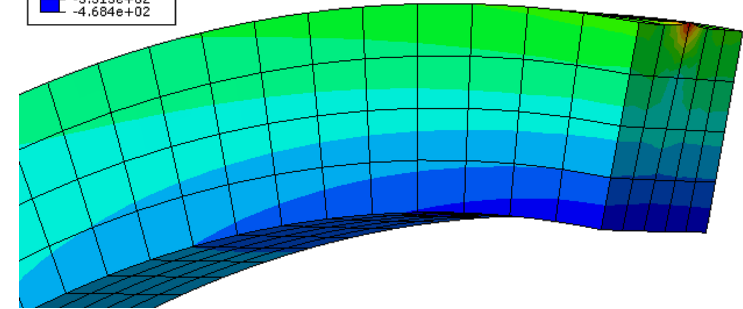
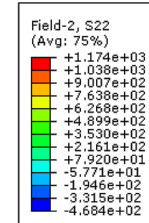
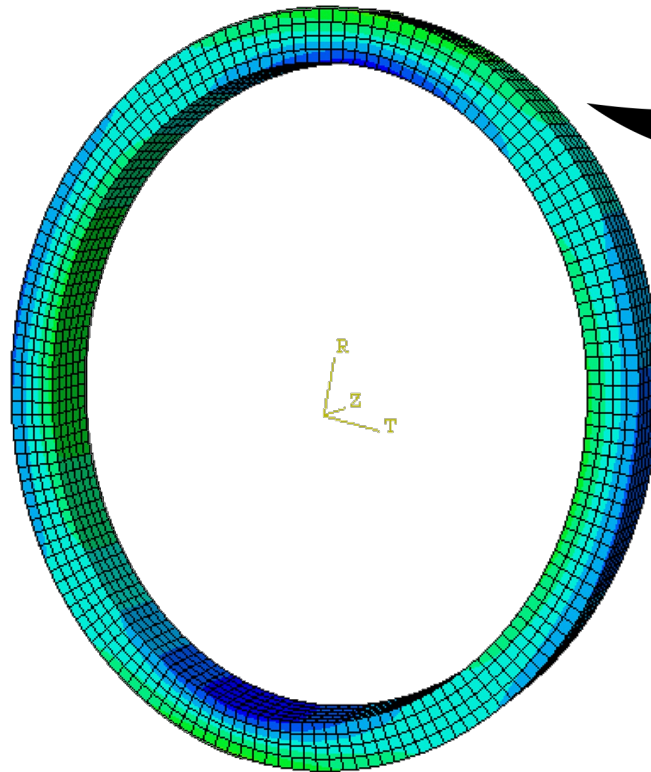
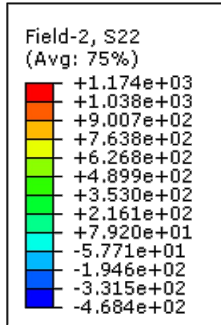


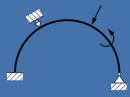
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Simulation

$$\sigma_{max} = 1174 \text{ Mpa}$$

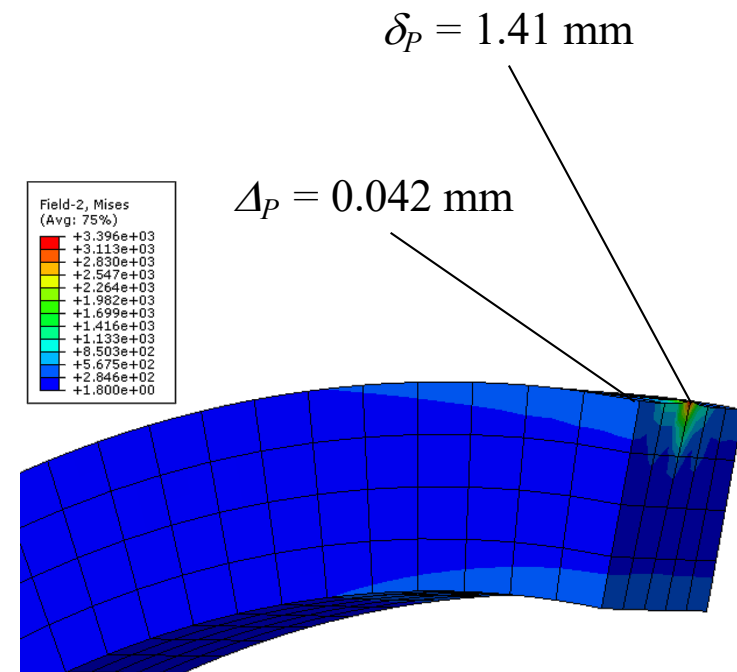
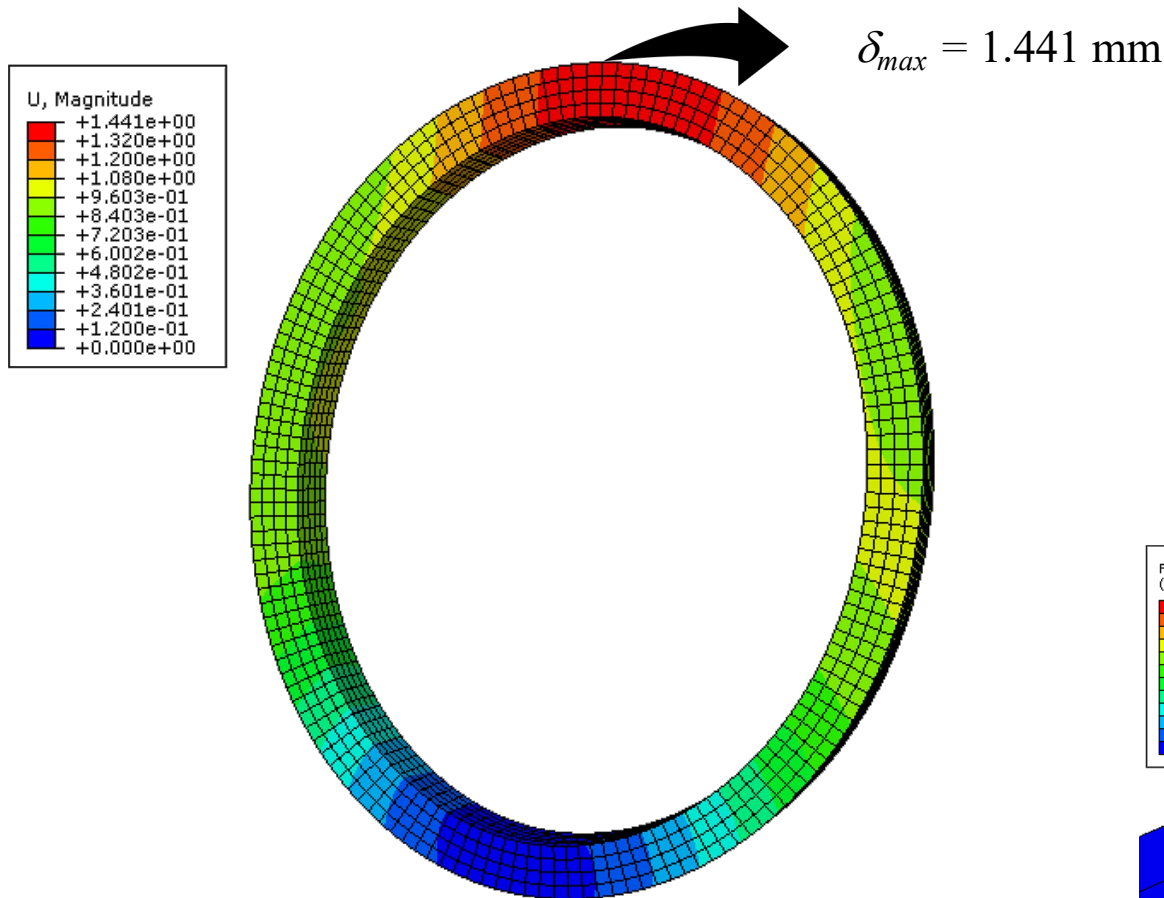
$$\sigma_{min} = -468 \text{ Mpa}$$



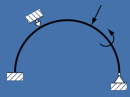


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Simulation



Merci pour votre attention



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

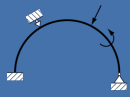
Démonstration : Théorème de Menabrea

Reprenons l'expression de l'énergie de déformation (seconde formule de Clapeyron) mais en séparant les forces généralisées P_1, P_2, \dots, P_m appliquées au système et les hyperstatiques R_1, R_2, \dots, R_k

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} P_i P_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{i,m+j} P_i R_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{m+i,j} R_i P_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{m+i,m+j} R_i R_j$$

Si l'on extrait de cette expression les $2(m+k) - 1$ termes dépendant de l'hyperstatique R_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$), l'énergie de déformation peut être explicitée sous la forme suivante, où U' dénote la part de l'énergie de déformation qui est indépendante de R_ℓ

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_{i,m+l} P_i R_l + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_{m+l,j} R_l P_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^k a_{m+i,m+j} R_i R_l + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k a_{m+l,m+j} R_l R_j + \frac{1}{2} a_{m+l,m+l} R_l^2 + U'$$



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

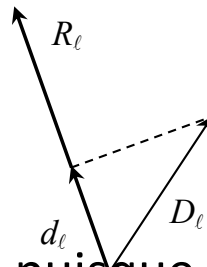
Démonstration : Théorème de Menabrea

En dérivant cette relation par rapport à l'hyperstatique R_ℓ , on trouve

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial U}{\partial R_\ell} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_{i,m+l} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_{m+l,j} P_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^k a_{m+i,m+j} R_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^k a_{m+l,m+j} R_j + a_{m+l,m+l} R_\ell \end{aligned}$$

Comme seul le dernier terme du membre droit de cette égalité contient l'hyperstatique de rang ℓ , la dérivée seconde de l'énergie de déformation par rapport à R_ℓ s'écrit simplement

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_\ell^2} = a_{m+l,m+l} > 0$$



qui est bien strictement positive, puisque les coefficients d'influence directs sont nécessairement positifs, le facteur $a_{m+l,m+l}$ étant la projection sur l'axe de R_ℓ du déplacement du point d'application de R_ℓ provoqué par une force unité appliquée en ce même point dans la direction précisément de la force R_ℓ